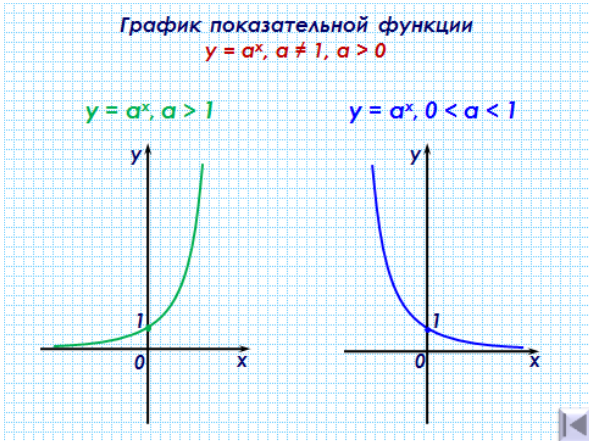
Образовательный Центр "Лучшее Решение"
www.лучшеерешение.рф www.lureshenie.ru www.высшийуровень.рф
www.лучшийпедагог.рф www.publ-online.ru

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОУ ВО МО «Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока:

Показательные уравнения и способы их решения



Автор: **Савинова Лариса Николаевна,** преподаватель математики ПЭК ГГТУ г.о. Орехово-Зуево, Московская область, Российская Федерация

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = h(x)}$$

Показательные уравнения и способы их решения

Цели урока

Дидактическая цель:

- сформировать умения и навыки решения показательных уравнений различными способами;
- обобщить понятие степени с действительным показателем.

воспитательная цель:

- развивать творческую активность, продуктивное мышление, навыки самоконтроля и творческие способности студентов при решении показательных уравнений;
- систематически обращать внимание на грамотность записей на доске и в тетрадях.

Основные знания и умения

Студенты должны

- *знать*:
  - определение показательного уравнения;
  - основные способы решения показательных уравнений;
- *уметь*:
  - решать несложные показательные уравнения.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока.
II. Повторение и закрепление изученного материала
III. Изучение нового материала
IV. Закрепление материала на уроке
V. Домашнее задание

II. Повторение и закрепление изученного материала

1) Ответы на вопросы по домашнему заданию.
2) Контроль усвоения материала в виде теста.

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Найти значение выражения:	
$\frac{\left(5^{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 5^{1+\sqrt{2}}}{125^{\sqrt{2}}}$	$\frac{\left(2^{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot 2^{2-\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}$
Ответы: а) 1 б) 25 в) 5 г) 1/5	Ответы: а) 1 б) 4 в) 2 г) 1/4
№ 2. Упростить выражение	
$\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a}}}$	$\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$
Ответы: а) $a^{\frac{3}{4}}$ б) $a^{\frac{1}{3}}$ в) $a^{\frac{1}{4}}$ г) $a^{\frac{2}{3}}$	Ответы: а) $a^{\frac{3}{8}}$ б) $a^{\frac{1}{8}}$ в) $a^{\frac{15}{8}}$ г) $a^{\frac{3}{16}}$
№ 3. Найти область значений функции:	
$y = 2 \cdot 3^{\cos x} - 1$	$y = 3 \cdot 2^{\sin x} + 1$
Ответы: а) $[-1; \infty)$ б) $\left[-\frac{1}{3}; 5\right]$ в) $[2; 5]$ г) $(0; \infty)$	Ответы: а) $[2,5; 7]$ б) $(0; \infty)$ в) $[1; 7]$ г) $\left[\frac{5}{2}; \infty\right)$

III. Изучение нового материала

1. Определение показательного уравнения

Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится только в показателе степени.

Например, $2^{x+1} - 7 = 0$ **- показательное уравнение,**

а $2^{x+1} = x$ **- непоказательное.**

Уравнение вида $a^x = b$ называется *простейшим* показательным.

Решение показательных уравнений основано на следующем свойстве, выраженном теоремой.

Теорема. Если равны основания степеней, то равны и показатели степеней, т.е. уравнение $a^x = a^b$ имеет корень $x = b$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

2. Способы решения показательных уравнений:

1. способ уравнивания оснований;
2. способ вынесения общего множителя за скобки;
3. способ приведения к квадратному уравнению;
4. графический способ;
5. способ группировки;
6. логарифмирование обеих частей уравнения по одному и тому же основанию.

3. Решение показательных уравнений

1. Способ уравнивания оснований

Пример 1. Решить уравнение

$$4 \cdot 2^x = 1$$

$$2^2 \cdot 2^x = 2^0$$

$$2^{2+x} = 2^0$$

$$2 + x = 0$$

$$\underline{x = -2}$$

Ответ: -2.

1. Способ уравнивания оснований

Пример 2. Решить уравнение $2^{x^2-7x+12}=1$.

По определению нулевого показателя получим

$$2^{x^2-7x+12}=2^0$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x_1=3 \quad x_2=4$$

Ответ: <u>3; 4.</u>

1. Способ уравнивания оснований

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 128 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{1/8}\right)^{2x} = 2^7$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^{2x} = 2^7 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{6x} = 2^7 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{6}$$

Ответ: $\underline{x = 1\frac{1}{6}}$

1. Способ уравнивания оснований

Пример 4. Решить уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$$

$$2x = -8$$

$$\underline{x = -4}$$

1. Способ уравнивания оснований

Пример 5. Решить уравнение

$$2^{x-2}=5^{2-x}.$$

Разделим обе части уравнения на правую часть

$$2^{x-2}=5^{2-x} \quad \Big| : 5^{2-x}$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{2-x}}=1$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{-(x-2)}}=1$$

$$(2\cdot 5)^{x-2}=1$$

$$10^{x-2}=10^{0}$$

$$x-2=0$$

$$\underline{x=2}$$

Ответ: 2.

2. Способ вынесения общего множителя за скобки

Пример 1. Решить уравнение

$$2^{x+3} - 2^x = 112$$

$$2^x\left(2^3 - 1\right) = 112$$

$$2^x \cdot 7 = 112$$

$$2^x = 16$$

$$\underline{x = 4}$$

2. Способ вынесения общего множителя за скобки

Пример 2. Решить уравнение

$$2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 44 \quad \Big| \ \textit{вынесем за скобки } 2^{x-3}$$

$$2^{x-3}\left(\frac{2^x}{2^{x-3}} + \frac{2^{x-1}}{2^{x-3}} - \frac{2^{x-3}}{2^{x-3}}\right) = 44$$

$$2^{x-3}\left(2^{x-x+3} + 2^{x-1-x+3} - 1\right) = 44$$

$$2^{x-3}\left(2^3 + 2^2 - 1\right) = 44$$

$$2^{x-3} \cdot 11 = 44$$

$$2^{x-3} = 4$$

$$x - 3 = 2$$

$$\underline{x = 5}$$

2. Способ вынесения общего множителя за скобки

Пример 3. Решить уравнение

$$3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=25$$

$$3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=25$$

$$3^{x-2}\left(3^{3}-2\right)=25$$

$$3^{x-2}\cdot 25=25$$

$$3^{x-2}=1$$

$$x-2=0$$

$$\underline{x=2}$$

или

$$3^{x}\cdot 3-2\cdot 3^{x}\cdot 3^{-2}=25$$

$$3^{x}\left(3-2\cdot\frac{1}{9}\right)=25$$

$$3^{x}\cdot\frac{25}{9}=25$$

$$3^{x}=9$$

$$\underline{x=2}$$

2. Способ вынесения общего множителя за скобки

Пример 4.

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$$

$$6^{x-1}\left(6^2 + 35\right) = 71$$

$$6^{x-1} \cdot 71 = 71$$

$$6^{x-1} = 6^0$$

$$\underline{x = 1}$$

3. Способ приведения к квадратному уравнению

Пример 1. Решить уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Сделаем замену переменной

$$t = 2^x, \quad \text{тогда} \quad 4^x = \left(2^x\right)^2 = t^2.$$

Получим квадратное уравнение относительно переменной t:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 4$$

Решая уравнения относительно x, получим

$$2^x = 1 \qquad 2^x = 4$$

$$x = 0 \qquad x = 2$$

Ответ: <u>0; 2</u>.

3. Способ приведения к квадратному уравнению

Пример 2. Решить уравнение $\underline{7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49}$

Пусть $t = 7^x$, тогда $7^{2x} = \left(7^x\right)^2 = t^2$.

Решая квадратное уравнение, получим:

$$t^2 - 48t - 49 = 0$$

$t_1 = 49$ $\quad$ $t_2 = -1$

$7^x = 49$ $\quad$ $7^x = -1$

$x = 2$ $\quad$ нет решений,

т.к. $7^x \succ 0$ *или* $E(7^x) = (0; \infty)$

Ответ: $\underline{2}$.

3. Способ приведения к квадратному уравнению

Пример 3. Решить уравнение $\underline{4\cdot 2^{2x}-33\cdot 2^{x}+8=0}$

$t=2^x,\quad t^2=2^{2x}$

$4t^2-33t+8=0$

$D=33^2-4\cdot 4\cdot 8=1089-128=961=31^2, \quad \Rightarrow \quad t_1=\frac{1}{4}, \quad t_2=8$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x=\frac{1}{4} \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2^{-2} \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ответ: <u>-2; 3.</u>

3. Способ приведения к квадратному уравнению

Пример 4. Решить уравнение $5 \cdot 5^{2x} + 43 \cdot 5^{x} + 24 = 0$

Сделаем замену переменной

$t = 5^{x}$, и решим уравнение $5t^{2} + 43t + 24 = 0$

$$D = 43^{2} - 4 \cdot 5 \cdot 24 = 1369 = 37^{2}, \quad \Rightarrow \quad t_1 = -8, \qquad t_2 = -0{,}6$$

$$\left[\begin{array}{ll} 5^{x} = -8 & \text{нет решений} \\ 5^{x} = -0{,}6 & \text{нет решений} \end{array}\right.$$

Ответ: нет решений.

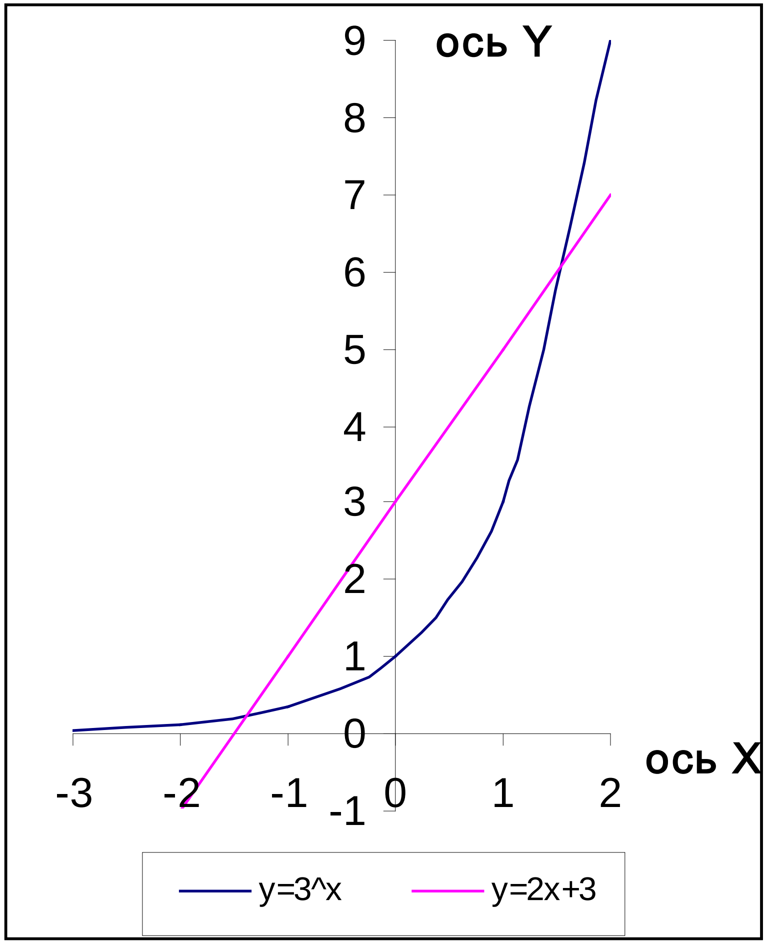
4. Графический способ

Пример 1. Решить уравнение графически $\underline{3^x = 2x + 3}$.

Строим графики функций на доске $y = 3^x$ и $y = 2x + 3$.

С помощью рисунка находим абсциссы двух точек пересечения графиков.

4. Графический способ

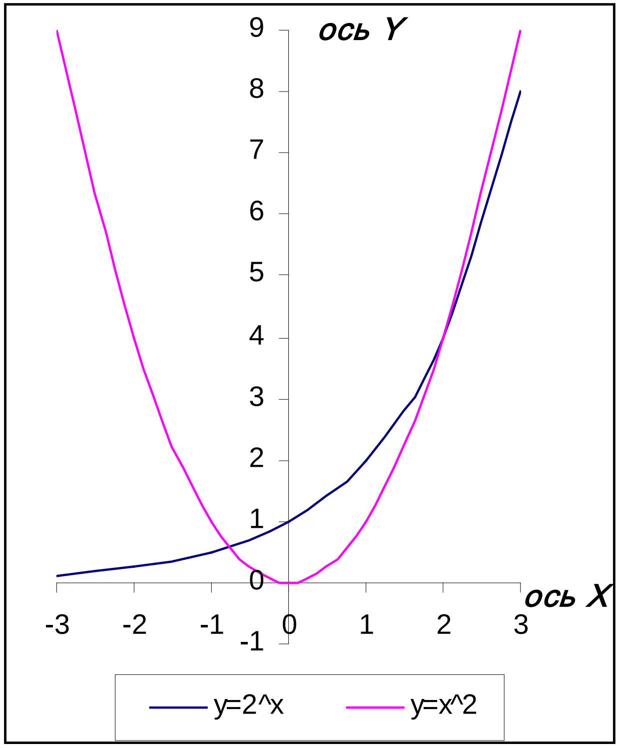


Ответ: $x \approx -1{,}4; \quad 1{,}7.$

4. Графический способ

Пример 2. Решить уравнение графически $\underline{2^x = x^2}$.

Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = x^2$



Ответ: $x_1 \approx -0{,}8;\quad x_2 = 2.$

5. Способ группировки

Пример 1. Решить уравнение $\underline{3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}}$

В левую часть уравнения перенесем степени с основанием 2, в правую часть – степени с основанием 5 и решим его:

$$3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$$

$$2^{x-2}\left(3 \cdot 2^{x+1-x+2} - 1\right) = 5^{x-2}\left(5^{x-x+2} - 2\right)$$

$$2^{x-2}\left(3 \cdot 2^3 - 1\right) = 5^{x-2}\left(5^2 - 2\right)$$

$$2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$$

$$2^{x-2} = 5^{x-2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x - 2 = 0$$

$$\underline{x = 2}$$

5. Способ группировки

Пример 2. Решить уравнение

$$\underline{3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}}$$

$$3^{x+4} - 3^{x+3} = 5^{x+4} - 3 \cdot 5^{x+3}$$

$$3^{x+3}(3-1) = 5^{x+3}(5-3)$$

$$3^{x+3} \cdot 2 = 5^{x+3} \cdot 2$$

$$3^{x+3} = 5^{x+3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{0}$$

$$x + 3 = 0$$

$$\underline{x = -3}$$

5. Способ группировки

Пример 3. Решить уравнение

$$\underline{2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11}.$$

$$2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$$

$$2^{8-x}-2^{3-x}\cdot 11=7^{4-x}-7^{3-x}$$

$$2^{3-x}\left(2^{8-x-3+x}-11\right)=7^{3-x}\left(7^{4-x-3+x}-1\right)$$

$$2^{3-x}\left(2^{5}-11\right)=7^{3-x}(7-1)$$

$$2^{3-x}\cdot 21=7^{3-x}\cdot 6$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x}=\frac{2}{7}$$

$$3-x=1$$

$$\underline{x=2}$$

5. Способ группировки

Пример 4. Решить уравнение

$$2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}.$$

$$2^{x+1}+2^{x-1}+2^{x-3}=3^{x-2}+3^{x-1}+2\cdot 3^{x-3}$$

$$2^{x-3}\left(2^{x+1-x+3}+2^{x-1-x+3}+1\right)=3^{x-3}\left(3+3^{2}+2\right)$$

$$2^{x-3}\left(2^{4}+2^{2}+1\right)=3^{x-3}\left(3+9+2\right)$$

$$2^{x-3}\cdot 21=3^{x-3}\cdot 14$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}=\frac{14}{21}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

$$x-3=1$$

$$\underline{x=4}$$

6. Логарифмирование обеих частей уравнения

Пример 1. Решить уравнение $3^{2x-3}=11^{1-x}$

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим

$$(2x-3)\lg 3=(1-x)\lg 11$$

$$2x\lg 3-3\lg 3=\lg 11-x\lg 11$$

$$2x\lg 3+x\lg 11=\lg 11+3\lg 3$$

$$x(2\lg 3+\lg 11)=\lg 11+3\lg 3$$

$$x=\frac{\lg 11+3\lg 3}{2\lg 3+\lg 11}$$

$$x=\frac{\lg 297}{\lg 99}$$

6. Логарифмирование обеих частей уравнения

Пример 2. Решить уравнение $\underline{3^x = 8}$.

Согласно основному логарифмическому тождеству, имеем $8 = 3^{log_3 8}$;

тогда $3^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^{log_3 8} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = log_3 8}$.

К тому же результату можно прийти, логарифмируя обе части уравнения по основанию 3: $3^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x\,log_3 3 = log_3 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = log_3 8}$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, вычислим приближенное значение корня:

$$3^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \lg 3 = \lg 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \lg 8/\lg 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 0{,}9031/0{,}4771, \quad \underline{x \approx 1{,}89}$$

IV. Закрепление изученного материала на уроке

Контрольные вопросы и задания

- Что такое показательное уравнение?
- Какие из следующих уравнений являются показательными?

а) $3^{x-1}+5=0;$

б) $x\cdot 3^{x+1}=0{,}5;$

в) $2^{x}+3^{x+1}=5;$

г) $5^{x}=x^{2}+1$

Контрольные вопросы и задания

1) Решить уравнение $9^x + 15^x = 25^x$ (*Указание*. Разделить обе части уравнения на 9^x или 25^x, затем сделать замену переменной и свести данное уравнение к квадратному).
2) Решить уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{16}{81}$. (*Ответ*: -1)
3) Решить уравнение $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ (*Ответ*: $x \approx -1{,}701$)

V. Домашнее задание

- Учебник: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. – М. Просвещение, 2017.
- [1]: стр.77 – 79, разобрать задачи 1-9; материал изучить по конспекту.
- № 210 - 215 (нечетные номера).
- № 217 – 220 (на дополнительную оценку)